Φυλλάδιο 1, άσκηση 4

(ii) $(3-2i)-(6+4i) = (3+(-2)i)+(-6+(-4)i) = (3+(-6))+((-2)+(-4))i = -3-6i$

(iii) $3i(6+i) = 18i+3i^2 = 18i-3 = -3+18i$

$i^2=-1$

(iv) $1/(1+i)$ (δηλαδή το $(1+i)^{-1}$) $= \frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)i$

Πολ/ζω κ' αριθμητή κ' παρονομαστή με το συζυγές του παρονομαστή

Συμβολισμός. Αν $z \in \mathbb{C}$ θέτουμε $z^1=z,\ z^2=z\cdot z,\ z^3=z\cdot z^2,\ z^{\nu+1}=z\cdot z^{\nu}$

• $(1+i\sqrt{3})^2 = (1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 1^2+2\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2 = 1+2\sqrt{3}i-3 = 2(-1+\sqrt{3}i)$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ Ι

$i^1=i$ $\quad i^3=-i$ $\quad i^5=i$ $\quad i^7=-i$ $\quad i^9=i$ $\quad i^{11}=-i$

$i^2=-1$ $\quad i^4=1$ $\quad i^6=-1$ $\quad i^8=1$ $\quad i^{10}=-1$

Συνεχίζουμε στο φυλλάδιο 1 άσκ 1

Παρατήρηση Δείξαμε ότι για $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Σαν πόρισμα $|z^2| = |z|^2$

Συνεχίζοντας $|z^3| = |z z^2| = |z||z^2| = |z||z|^2 = |z|^3$

$|z^4| = |z|^4$, κ' γενικά $\forall \nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq 1$

$|z^\nu| = |z|^\nu$

π.χ. Αν $|z| = 2$, τότε $|z^{2019}| = |z|^{2019} = 2^{2019}$

Αν $|z| = 1$, τότε $|z^\nu| = 1, \forall \nu \geq 1$

Ακόμα στο φυλλ 1 άσκ 3

$|(1-i)^2(1+i)^4| = |(1-i)^2||(1+i)^4| = |1-i|^2|1+i|^4 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^4 = 2 \cdot 2^2 = 8$

Υπενθύμιση. Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Ο z λέγεται πραγματικός όταν $b = 0$

Ορισμός Ο z λέγεται φανταστικός όταν $a = 0$

π.χ. ο $\sqrt{5}i$ είναι φανταστικός αλλά όχι πραγματικός

ο 0, -''- και

ο $1+i$ δεν είναι ούτε πραγματικός ούτε φανταστικός

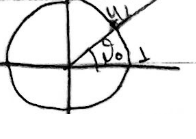
Πρόταση. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Τότε (i) $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ ώστε $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

(ii) $\exists$ μοναδικό $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ ώστε $z = |z|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ (*)

Η (*) λέγεται τριγωνομετρική μορφή του z

Απόδειξη Αφού $z \neq 0$ έχουμε $|z| \neq 0$. Θέτουμε $w = \frac{z}{|z|}$ τότε $|w| = |z z^{-1}| =$

$= |z||z^{-1}| = 1$



Άρα $\exists$ μοναδικό $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ με $w = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$

Παρατήρηση: Έστω $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ (δηλαδή $z \in \mathbb{C}$ κ' $z \neq 0$) κ' $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ με
$z = |z|(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ κ' $z = |z|(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$
Τότε $\exists$ μοναδικός ακέραιος κ ώστε $\theta_2 - \theta_1 = 2\kappa\pi$.

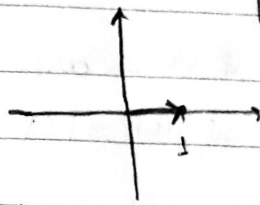
Αντίστροφα, αν $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $\exists$ ακέραιος κ με $\theta_2 - \theta_1 = 2\kappa\pi$

Τότε $\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2$

Φυλλάδιο 1 ασκ 1.

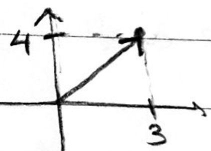
(i) $z = 1+i = 1+1 \cdot i$. Άρα το σημείο είναι το $A(1,1)$

(ii) $z = 1 = 1+0i$. Άρα το σημείο είναι το $A(1,0)$

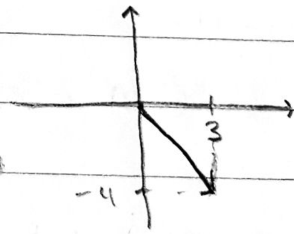


(iii) $z = i = 0+1i$. Άρα το σημείο είναι το $A(0,1)$

(v) $z = 3+4i$ Άρα το σημείο είναι το $A(3,4)$

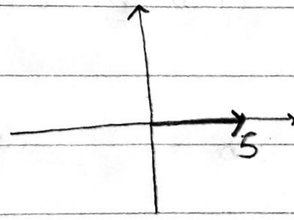


(vi) $z = 3-4i$. Άρα το σημείο είναι το $A(3,-4)$

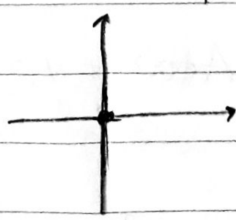


Αυτός ο μιγαδικός είναι ο συζυγής του προηγούμενου κ' θα μπορούσε να σχεδιαστεί με βοήθεια του κατοπτρισμού

(vii) $z = 5 = 5+0 \cdot i$ Άρα το σημείο είναι το $A(5,0)$



(viii) $z = 0 = 0+0i$ Άρα το σημείο είναι το $A(0,0)$



ασκ 4

(i) $(-4+6i)+(7-2i) = 3+4i$

• $(4+4i)+(-8-7i)+(5+3i) = (4-8+5)+(\cancel{4i-7i+3i}) = 1+0i = 1$

• $(3+2i)\cdot(4+5i) = 12+15i+8i+10i^2 = 12+23i+10i^2 = 12+23i-10 = 2+23i$

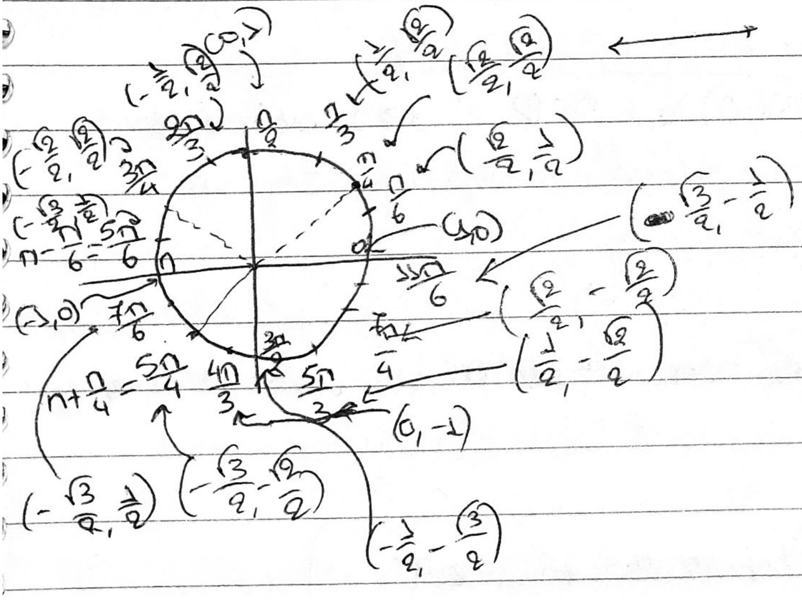
• $(4+3i)(4-3i) = 16-\cancel{12i}+\cancel{12i}-9i^2 = 16+9 = 25+0i = 25$

(ii) $i^2+2i+1 = -\cancel{1}+2i+\cancel{1} = 0+2i = 2i$

(iii) $\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+1)} = \frac{6+3i+2i+i^2}{4+2-2i-i} = \frac{5+5i}{6-3i} = \frac{(5+5i)(6+3i)}{(6-3i)(6+3i)} = \frac{30+15i+30i+15i^2}{36+\cancel{18i}-\cancel{18i}-9i^2}$

$= \frac{15+45i}{45} = \frac{1+3i}{3} = \frac{1}{3}+i$

• $\frac{(6-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})} = \frac{(6-i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})} = \frac{6-6\sqrt{2}i-i\sqrt{2}+2i^2}{-\cancel{\sqrt{2}i}+1+\cancel{i\sqrt{2}}-2i^2} = \frac{6-5\sqrt{2}i-2}{1+2} = \frac{4-i5\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}-\frac{i5\sqrt{2}}{3}$



Θεώρημα (τύπος de Moivre): Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}-\{0\}$ με $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$z_2=|z_2|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ όπου

$\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$

Τότε $z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$

Απόδειξη

Έχουμε $z_1z_2=|z_1||z_2|\left((\cos\theta_1)(\cos\theta_2)-(\sin\theta_1)(\sin\theta_2)+i\left((\cos\theta_1)(\sin\theta_2)+(\cos\theta_2)(\sin\theta_1)\right)\right)$

Από τις ταυτότητες $\cos(\theta_1+\theta_2)$, $\sin(\theta_1+\theta_2)$ το αποτέλεσμα έπεται

Πόρισμα

Έστω $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ με $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ με $\theta\in\mathbb{R}$. Τότε $\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$.

Απόδειξη

Από τύπο de Moivre: $\left(|z|(\cos\theta+i\sin\theta)\right)\left(\frac{1}{|z|}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))\right)=\frac{|z|}{|z|}(\cos 0+i\sin 0)=1$

Παρατήρηση

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\frac{1}{|z|}(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{1}{|z|^2}|z|(\cos\theta-i\sin\theta)=$$

$$=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$$

Υπενθύμιση

$z^1=z,\ z^2=z\cdot z,\ z^3=z\cdot z^2$

Πρόταση: Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ με $\theta\in\mathbb{R}$ κ' $n\geq 1$ ακέραιος. Τότε $z^n=|z|^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$

Απόδειξη.

Για $n=1$ προφανές. Για $n=2$ άμεσο από τύπο de Moivre. Για $n\geq 3$ με επαγωγή

π.χ: Έστω $z=1+i$. Υπολογίστε το z^{2019}

$$\left(z^{2019}=|z|^{2019}(\cos(2019\theta)+i\sin(2019\theta))=\sqrt{2}^{2019}(\cos(2019\theta)+i\sin(2019\theta))\right)$$

Βήμα 1ο: $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Βήμα 2ο: Θέτω $w=\frac{z}{|z|}$. Υπολογίζω $\theta\in[0,2\pi)$ ώστε $w=\cos\theta+i\sin\theta$

Πράγματι, $w=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Άρα $\theta=\frac{\pi}{4}$

Συνεπώς,

$2|\sqrt{2}|\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Άρα από πρόταση,

$2^{2019}=(\sqrt{2})^{2019}\left(\cos\frac{2019\pi}{4}+i\sin\frac{2019\pi}{4}\right)$. Έχουμε:

$\sqrt{2}^{2019}=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{2018}=2^{1009}\sqrt{2}$

Κάνουμε Ευκλείδεια διαίρεση του 2019 με το 8, άρα $\begin{array}{r|l} 2019 & 8 \\ \hline & 252 \end{array}$

$2019=8\cdot252+3$

Άρα $\frac{2019\pi}{4}=\frac{(8\cdot252+3)\pi}{4}=252\cdot2\pi+\frac{3\pi}{4}$

Άρα $\cos\frac{2019\pi}{4}+i\sin\left(\frac{2019\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα $2^{2019}=2^{1009}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$